

1 Green-Funktion der freien Schrödinger-Gleichung

1.1

Man zeige, dass die Zeitentwicklung $\psi_t := e^{\frac{-itP^2}{2m\hbar}} \psi_0$ eines freien Teilchens mit Masse $m > 0$ und normiertem "Start-Wellenpaket" $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R})$ für alle Zeiten $t \neq 0$ beschrieben werden kann durch die Formel

$$\psi_t(q) = \int_{\mathbb{R}} dq' g_t(q, q') \psi_0(q'), q \in \mathbb{R} \quad (1)$$

wobei

$$g_t(q, q') := \left(\frac{m}{2\pi\hbar|t|} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-i\pi t}{4|t|}} e^{\frac{im(q-q')^2}{2\hbar t}} \quad (2)$$

freie Green-Funktion oder freier Propagator genannt wird.

1.2

Für $\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, also unter der zusätzlichen Bedingung

$$\|\psi_0\|_1 := \int_{\mathbb{R}} dq |\psi_0(q)| < \infty, \quad (3)$$

zeige man, dass die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen für $t \neq 0$ in einem "Raumgebiet" $G \subset \mathbb{R}$ mit "Volumen" $|G| := \int_G (dq) < \infty$ zu finden, von oben beschränkt ist durch die positive Zahl

$$\left(\frac{m}{2\pi\hbar|t|} \right) (\|\psi_0\|_1)^2 |G|. \quad (4)$$